جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٥ / ٢٠١٦
المادة: نظرية القياس - السنة الثالثة رياضيات
العلامة : ١٠٠ درجة. المدة : ساعة ونصف. اسم الطالب:

السؤال الأول (٢٤ درجة):

اكتب العبارات التالية بشكل صحيح ودقيق:

(١) يتألف جبر بوريل $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ من مجالات مفتوحة ومجالات مغلقة فقط.

(٢) مجموعة كانتور C تحتوي عدداً غير منته من الأعداد الواقعة في المجال $[0,1]$، وهي مجموعة عدودة وقيوسة حسب ليبيغ وقياسها 1 .

(٣) تكون الدالة f قيوسة إذا وفقط إذا كانت مستمرة.

(٤) σ -الجبر $\{\phi, X\}$ يمكن توليده بالصف $\{X\}$ فقط .

(٥) إذا كان μ^* قياساً خارجياً على 2^X فإن صف المجموعات القيوسة $\mathfrak{M}_{\mu}$ يشكل σ -حلقة و لا يشكل σ -جبر.

(٦) قياس العد وقياس ليبيغ في $\mathbb{R}$ هما قياسان منتهيان.

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

(أ) عرف الخاصة تقريباً في كل مكان .

(ب) أثبت أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

تساوي 1 تقريبا في كل مكان على $\mathbb{R}$.

(جـ) لتكن المتتالية $\{f_n(x)\}$ المعرفة بالشكل :

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{n^2} & ; \quad x\in[0,20)\\ 20 & ; \quad x=20\end{cases}$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة من الدالة $f(x)=0$ تقريباً في كل مكان على المجال $[0,20]$.

السؤال الثالث (٣١ درجة):

(أ) متى نقول عن تطبيق $T:(X,\mathcal{F})\longrightarrow(X',\mathcal{F}')$ إنه $(\mathcal{F}-\mathcal{F}')$ قيوس ؟

واذكر مثالين عن التطبيقات القيوسة .

(ب) لتكن الدوال $f,g,h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالشكل :

$$f(x)=x^2+1 \quad , \quad g(x)=\ln\left(x^2+1\right) \quad , \quad h(x)=e^{x^2+1}.$$

المطلوب : (١) أثبت أن هذه الدوال قيوسة على $\mathbb{R}$.

(٢) هل الدوال التالية قيوسة على $\mathbb{R}$ ولماذا ؟ .

$$e^{f(x)} \quad , \quad e^{g(x)} \quad , \quad (g\circ h)(x) \quad , \quad (h\circ g)(x) \quad , \quad \frac{f(x)}{h(x)}.$$

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

اثبت أن الدوال التالية كمولة حسب ليبيغ على المجال $[1,10]$ ثم احسب تكاملاتها :

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x=1\\ 10 & ; \quad 1<x<10\\ 0 & ; \quad x=10.\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x & ; \quad 1\le x\le 4\\ x^2-12 & ; \quad 4<x\le 10\\ 0 & ; \quad x=10.\end{cases}$$

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في ٢٣ / ٨ / ٢٠١٦ .

مدرس المادة : د. إبراهيم إبراهيم



①

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
الدورة الإضافية ٢٠١٥ / ٢٠١٦

السؤال الأول (٢٤ درجة):

(١) يحتوي جبر بورل $B_{\mathbb{R}}$ من مجالات مفتوحة ومغلقة ونصف مغلقة كما يحوي مجموعات أخرى ليست مجالات مثل ϕ والمعدودة والمنتهية.

(٢) مجموعة كانتور تحتوي عدداً غير منتهٍ من أعداد المجال $[0,1]$ وهي مجموعة غير معدودة وقيوسة حسب ليبيغ وقياسها ٠.

(٣) ليس بالضرورة أن تكون الدالة مستمرة لتكون قيوسة (مثال دالة ديريخليه) لكن كل دالة مستمرة على مجموعة تكون قيوسة عليها.

(٤) يمكن توليد σ-الجبر $\{\phi, X\}$ بالصفين $\{X\}$ و $\{\phi\}$.

(٥) الصف $\mathcal{M}_{\mu^*}$ يشكل σ-جبر على X.

(٦) قياس العد في $\mathbb{R}$ هو قياس غير منتهٍ بينما قياس ليبيغ σ-منتهٍ.

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

(أ) نقول عن خاصة P إنها محققة تقريباً في كل مكان على المجموعة القيوسة E إذا تحقق الشرطان:
أ- توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ قيوسة وقياسها 0
ب- الخاصة P محققة على $E \setminus E_0$ وغير محققة على E_0.

(ب) لدينا $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ لأن $\mathbb{Q}$ معدودة، كما أن

$$f(x) = 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

(بعبارة أخرى:)

$$\lambda(E(f \neq 1)) = \lambda\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 1\} = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

(ج) لدينا

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad ; \quad x \in [0, 20)$$

$$\lambda(\{20\}) = 0.$$

لذلك

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{a.e.}{=} 0$$

③

السؤال الثالث (٢١ درجة):

٢) نقول عن التطبيق $T:(X,\mathfrak{F})\longrightarrow(X',\mathfrak{F}')$ إنه $(\mathfrak{F}'-\mathfrak{F})$ - قيوس
إذا كان $T^{-1}(\mathfrak{F}')\subset\mathfrak{F}$.

مثاليه: التطبيق الثابت والتطبيق المستمر.

ب) (١) الدوال f,g,h قيوسة على $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة.

(٢) • الدالة $e^{f(x)}$ قيوسة لأن $f(x)$ مستمرة و e^{x} قيوسة كونها مستمرة
وبالتالي تركيب دالة قيوسة مع مستمرة يعطي دالة قيوسة.

• الدالة $e^{g(x)}$ قيوسة لأن $g(x)$ مستمرة و " " " " " " " .

• الدالة $(g\circ h)(x)=x^2+1$ مستمرة فهي قيوسة
(أو تركيب دالة قيوسة مع مستمرة)

• الدالة $(h\circ g)(x)$ " " " "

• الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ قيوسة لأنها قسمة دالتين قيوستين و $g(x)\neq 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

• الدالة $f(x)$ مكولة حسب ريمان لأنها مستمرة على المجال $[0,10]$ باستثناء $1, 10$
فهي مكولة حسب ليبيغ والتكاملان متساويان:

$$\int_{[0,10]} f(x)\,d\lambda = (R)\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} 10\,dx = 10x\Big]_0^{10} = 100.$$

• الدالة $g(x)$ مستمرة على المجال $[0,10]$ فهي مكولة حسب ريمان وبالتالي
مكولة حسب ليبيغ والتكاملان متساويان:

$$\int_{[0,10]} g(x)\,d\lambda = (R)\int_0^{10} g(x)\,dx = \int_0^{4} x\,dx + \int_4^{10}(x^2-12)\,dx + 0$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big]_0^4 + \Big[\frac{x^3}{3}-12x\Big]_4^{10} = \frac{854}{3}$$

يمكن إثبات أن الدوال قيوسة ومحدودة لتكون مكولة حسب ليبيغ

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم